Une pompe

On fait le vide dans une bouteille de volume V_0 contenant de l'air à la pression initiale p_0. La température reste pratiquement invariable pendant le pompage. A chaque tour de la pompe, de l'air de la bouteille emplit le volume u du cylindre de la pompe, à la pression p de la bouteille, puis est rejeté dans l'atmosphère. On suppose que l'air est un gaz parfait.

1. Cas discret : trouver la pression de la pompe après n cycles en fonction de u et V_0.

$$p_n = \text{...............................}$$

2. Cas continu : trouver la pression p de la pompe en fonction du temps, de u, V_0 et de la fréquence de rotation f de la pompe.
   Indice : Commencer par exprimer la quantité d'air pompée dy pendant un cours instant dt.

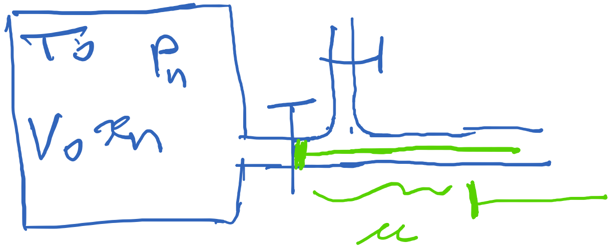
$$p(t) = \text{...............................}$$

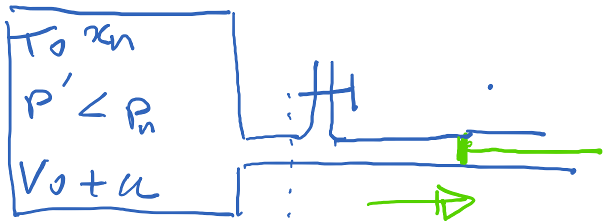
3. Montrer que dans la limite $u \ll V_0$ les deux résultats coïncident.
4. Au bout de combien de temps la pression a-t-elle chuté à 1 Pa, si $V_0 = 2000$ cm^3, $p_0 = 10^5$ Pa, $u = 50$ cm^3, $f = 300$ tours/minute ?

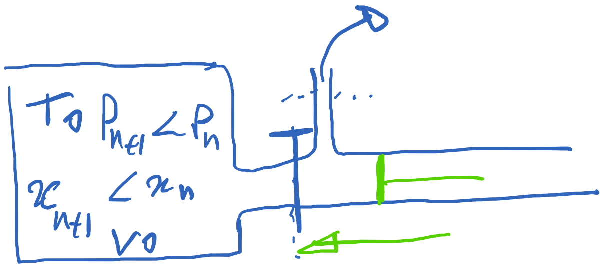
$$t = \text{...............................}$$

1. Cas discret : trouver la pression de la pompe après n cycles en fonction de u et V_0.

x_n : nombre de moles après n cycles

①


②


③


Après n cycles

① $P_n V_0 = x_n R T_0$

② $P_{n+1} (V_0 + u) = x_n R T_0$

③ $P_{n+1} V_0 = x_{n+1} R T_0$

$$P_{n+1} = \left(\frac{V_0}{V_0+u}\right) P_n \qquad \boxed{P_n = \left(\frac{V_0}{V_0+u}\right)^n P_0}$$

2. Cas continu : trouver la pression p de la pompe en fonction du temps, de u, V_0 et de la fréquence de rotation f de la pompe.
<u>Indice :</u> Commencer par exprimer la quantité d'air pompée dy pendant un cours instant dt.

– $p(t)$ et $x(t)$ on a $p(t)V_0 = x(t)RT_0$

– Pendant dt la pompe fait $f.dt$ cycles et elle extrait un volume $uf\,dt$, ce volume contient dy moles

$$dy = \frac{pu}{RT_0} f\,dt$$

– le nombre de moles, dx, qui sont extraites de V_0 pendant dt est $dx = -dy$

2. Cas continu : trouver la pression p de la pompe en fonction du temps, de u, V_0 et de la fréquence de rotation f de la pompe.
<u>Indice :</u> Commencer par exprimer la quantité d'air pompée dy pendant un cours instant dt.

$$p(t) V_0 = n(t) R T_0$$

$$V_0 \, dp = R T_0 \, dn \qquad dn = -\frac{p u}{R T_0} f \, dt$$

$$V_0 \, dp = - p u f \, dt$$

$$\int_{t=0}^{t} \frac{dp}{p} = \int_{t=0}^{t} - \frac{u}{V_0} f \, dt$$

$$\ln \frac{p(t)}{p_0} = - \frac{u}{V_0} f \, t$$

$$\boxed{p(t) = p_0 \exp\left(- \frac{u f}{V_0} t\right)}$$

3. Montrer que dans la limite $u \ll V_0$ les deux résultats coïncident.

① $\dfrac{V_0}{V_0+u} \simeq 1-\dfrac{u}{V_0}$

$P_n = \left(1-\dfrac{u}{V_0}\right)^n$

$\dfrac{1}{1+\varepsilon} \simeq 1-\varepsilon$

② $P_n = P_0 \exp\left(-\dfrac{u f}{V_0} t\right)$

$= P_0 \exp\left(-\dfrac{u n}{V_0}\right)$

$= P_0 \exp\left(-\dfrac{u}{V_0}\right)^n$

$= P_0 \left(1-\dfrac{u}{V_0}\right)^n$

$f t$ = nombre de cycle $= n$

$\exp(\varepsilon) \simeq 1+\varepsilon$

4. Au bout de combien de temps la pression a-t-elle chuté à 1 Pa, si $V_0 = 2000$ cm^3, $p_0 = 10^5$ Pa, $u = 50$ cm^3, $f = 300$ tours/minute ?

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{uft}{V_0}\right) \Rightarrow t = -\frac{V_0}{uf} \ln \underbrace{\frac{p}{p_0}}_{=10^{-5}}$$

$$t = 92\ s$$